LE FUNZIONI FRONTIERE DI PRODUZIONE

In base a quelle che possono essere le considerazioni sul concetto economico di efficienza (a questo proposito si veda la scheda su l'analisi delle *perfomance* produttive) si possono definire funzione di frontiera di produzione quei modelli per i quali la stima dei parametri avviene vincolando alla non positività dei residui, in maniera da ottenere per questo via un modello coerente con la teoria economica sulle funzioni di produzione. La funzione di produzione è infatti una frontiera rappresentante il massimo di output ottenibile da determinati fattori quando essi vengono utilizzati nella maniera più efficiente possibile, dato lo stato della tecnologia (Richmond, 1976). È possibile quindi osservare dei punti *al di sotto* della frontiera, ma non punti che giacciono sopra quest'ultima. Da questa posizione si evince che l'ammontare con il quale ciascuna impresa si colloca al di sotto della sua frontiera di produzione può essere considerato come una misura della sua efficienza (Forsund, Lowell e Schmidt, 1980)..

1 Le funzioni di frontiera parametriche

Il modello parametrico per le frontiere di produzione è stato introdotto in letteratura da [Ainger, Lovell e Schmidt 1977].

Nei modelli di frontiera stocastici si assume che l'output sia limitato da una funzione di produzione stocastica. Quindi possiamo scrivere

$$y_i \leq A + \sum_j \alpha_j X_{ij} + v_i \qquad (1)$$

dove v rappresenta un errore casuale. Assumendo che u_i rappresenta la mancanza di output rispetto a quello della frontiera, abbiamo

$$y_i \leq A + \sum_j \alpha_j X_{ij} + v_i - u_i \quad (2)$$

Quindi il termine di errore $(v_i - u_i)$ consta di due parti, una rappresentante il disturbo e l'altro rappresentante l'inefficienza tecnica.

È possibile argomentare che la componente di errore dovuta al caso (v_i) rappresenta gli eventi al di fuori del controllo delle imprese, come la fortuna o le condizioni meteorologiche, mentre la (u_i), cioè la componente di inefficienza, sia controllabile dall'azienda. Se i due tipi di errori sono assunti indipendenti tra loro e dagli inputs e si è specificata una particolare forma di distribuzione, la funzione di verosimiglianza può essere definita e quindi si possono calcolare stime MLE (massima verosomiglianza). Ciò richiede di massimizzare la funzione di verosomiglianza. I calcoli coinvolti non sono banali, ma ciò non ostacola l'implementazione empirica del modello. Inoltre è possibile utilizzare una semplice stima mediante il metodo dei minimi quadrati, e correggere l'intercetta aggiungendo uno stimatore consistente di $E(u)$ basato su un momento (il secondo o il terzo, nel caso *"half-normal"*) del quadrato dei residui. (Schmidt, Waldman, 1980). Avendo stimato il modello abbiamo ottenuto un valore per $(v_i - u_i)$. Per misurare l'efficienza adesso abbiamo bisogno di stimare u_i isolatamente. Una possibilità ovvia è calcolare $E(u_i \mid v_i - u_i)$ dai valori trovati di $(v_i - u_i)$ e dai parametri.(Jondrow, Lovell, Materov e Schmidt, 1982).

Questi hanno esplicitato una formula per il calcolo di $E(u_i \mid v_i - u_i)$ nel caso "normal/half-normal". Questa, però, non è una stima consistente di u_i (la probabilità limite di $E(u_i \mid v_i - u_i) - u_i$ non è 0), poiché la variabilità di v_i non è conosciuta neanche quando tutte le altre variabili sono state calcolate.

Come si è visto utilizzando dati sezionali nella stima di frontiere di produzione stocastiche, si incorre nei seguenti problemi:

1. l'inefficienza tecnica di una particolare impresa non viene stimata

consistentemente. E infatti possibile stimare l'intero termine di errore di una data osservazione, ma in esso sono presenti sia l'inefficienza tecnica, sia il disturbo stocastico. La varianza della distribuzione dell'inefficienza tecnica, condizionata all'intero termine d'errore, non si annulla al crescere della numerosità del campione.

2. Una delle ipotesi su cui si basa il modello è l'indipendenza dell'inefficienza dei regressori. Questa ipotesi potrebbe essere non corretta, infatti un'impresa che conosca il suo livello di inefficienza molto probabilmente interverrà sugli inputs per superare il gap di inefficienza.

2 - Utilizzo dei dati panel

Nel caso di dati *panel,* questi problemi sono potenzialmente evitabili. Supponiamo di disporre di T osservazioni nel tempo di ognuna delle N imprese. L'inefficienza tecnica di una particolare impresa può essere stimata consistentemente per T che tende a ∞: l'aggiunta di più osservazioni sulla stessa impresa ci fornisce quindi un'informazione non ottenibile all'aumentare del numero di imprese. In secondo luogo, non sarà necessario assumere ipotesi sulle distribuzioni, come non è necessaria l'assunzione di incorrelazione tra i regressori e l'inefficienza.

Vediamo ora punto per punto come con i dati panel si risolvono i problemi su specificati. Il modello ad una singola equazione è:

$$y_{it} = \alpha + X'_{it}\beta + v_{it} - u_i, \quad u_i \geq 0 \quad (3) \qquad i = 1,...,N,\ t=1,\ ,T.$$

dove N il numero delle aziende e t i periodi di tempo, y_{it} è il prodotto e X_{it} è il vettore delle quantità di k input. I disturbi v_{it} sono incorrelati con i regressori X_{it}, mentre u_i (≥ 0) rappresenta l'inefficienza tecnica. Si assume che le u_i siano v.c. i.i.d. come media μ e varianza σ_u^2 e che siano indipendenti da v_{it}. L'ipotesi chiave di questo modello è che l'inefficienza di ciascuna impresa sia invariante nel tempo.

Ricordando che $E(u_i) = \mu \geq 0$, si definisce

$$\alpha = \alpha - \mu, \quad u_i^* = u_i - \mu$$

in modo che le u_i^* siano v.c. i.i.d. con media nulla.

Allora nel modello

$$y_{it} = \alpha^* + X'_{it}\beta + \mathrm{v}_{it} - u_i^* \quad (4)$$

I residui v_{it} e u_i^* hanno media nulla. Molti risultati della letteratura panel saranno applicabili direttamente, eccetto quelli che si basano sulla normalità dei residui.

Definiamo ora $\alpha_i = \alpha - u_i = \alpha^* - u_i^*$
il modello diventa

$$y_{it} = \alpha_i + X'_{it}\beta + \mathrm{v}_{it} \quad (5)$$

Si può notare che i parametri della (5) possono essere stimati attraverso OLS, trattando $(v_{it} - u_i^*)$ come il disturbo. La stima risultante di α^* e β sarà consistente per N che tende ad ∞ se gli effetti individuali u_i sono incorrelati con i regressori X_{it}.

In letteratura esistono diversi stimatori che risultano applicabili al modello esposto, a seconda delle assunzioni di ortogonalità trai regressori e gli effetti individuali. Esaminiamo ora gli stimatori.

2.1 Stimatore within

Lo stimatore *within* (Schmidt e Sickles,1984) tratta i termini u_i come fissi, cioè stima un'intercetta separata per ogni impresa. Ciò si può ottenere trascurando il termine costante ed aggiungendo una variabile *dummy* per ognuna delle N imprese. Un'altra procedura equivalente può essere quella della applicazione della cosiddetta trasformazione *within*: in sostanza si applica una OLS dopo aver espresso i dati in termini di scarti dalla media dell'impresa. In questo caso le N intercette saranno date dalla media dei residui dell'impresa.

Il vantaggio principale dello stimatore *within* è che la sua consistenza non si basa sull'incorrelazione tra i regressori e gli effetti impresa. Inoltre esso non dipende dalla distribuzione degli effetti, poiché trattandoli come fissi, procede condizionatamente alle loro realizzazioni, qualsiasi esse siano.

Il suo limite invece è dato dall'impossibilità di includere nella specificazione del modello regressori fissi nel tempo, anche se essi variano tra imprese; in questo caso le stime dell'effetto impresa includerebbero gli effetti delle variabili che sono costanti entro il campione. Il metodo within dà stime consistenti di β se N e T divergono ad infinito.

2.2 Lo stimatore dei minimi quadrati generalizzati (GLS)

Se supponiamo che gli u_i siano *random* ed incorrelati con i regressori, è possibile applicare una stima dei minimi quadrati generalizzati (GLS). La matrice degli errori dipenderà dalle varianze di u e v. Se le varianze sono note una GLS dà stime consistenti dei parametri se N e T vanno a ∞. Nel caso più realistico, cioè quando le varianze degli errori non sono note, si può fare ugualmente una stima GLS sulle varianze stimate. Una stima consistente delle Varianze si ottiene per N che tende a ∞. È quindi intuibile che è raccomandabile una stima GLS quando si ha un N abbastanza grande.

2.3 Lo stimatore di massima verosomiglianza (MLE)

Abbiamo visto che con dati *panel* non è necessario imporre ipotesi 'a priori sulle distribuzioni di u e v. Se però vengono fatte delle assunzioni su tali distribuzioni, si può ottenere un incremento dell'efficienza delle stime attraverso lo stimatore di massima verosomiglianza (MLE) (Schmidt e Sickles, 1984).

Supponiamo che v_{it} e u_i siano variabili casuali indipendenti ed identicamente distribuite, con densità $f(v)$ e $g(u)$, e che le u e v siano indipendenti fra loro e con i regressori. Se definiamo $\varepsilon_{it} = v_{it} - u_i$ possiamo notare che le ε_{it} sono indipendenti al variare di i. In questo modo possiamo scrivere la funzione di densità congiunta di ($\varepsilon_{i1},....\varepsilon_{iT}$):

$$h(\varepsilon_{\iota 1},......., \ \varepsilon_{\iota \mathrm{T}}) = \int_0^\infty g(u) \prod f(\varepsilon_{\iota\tau} + u)\delta\upsilon$$

dalla quale segue la funzione di verosomiglianza da massimizzare:

$$\mathrm{L} = \ \Pi_i h(y_{i1} - \alpha - X_{i1}^{'}\beta,......., y_{iT} - \alpha - X_{iT}^{'}\beta)$$

Poiché le stime di massima verosomiglianza sfruttano l'informazione sulle distribuzioni di u e v_i si può dedurre che esse siano in generale asintoticamente più efficienti degli stimatori visti prima.

2.4 La stima dell'efficienza con dati panel

Il disturbo associato all'osservazione di una data impresa, coinvolge le differenze tra errori casuali tradizionali (v) ed una variabile casuale non positiva che viene associata all'inefficienza (u). Vediamo come è possibile stimare l'inefficienza nel caso di dati *panel*.

Battese e Coelli (1988) definiscono l'efficienza tecnica di un'impresa come il rapporto tra la sua produzione media e la corrispondente produzione media che l'impresa avrebbe realizzato se l'effetto individuale (u_i) fosse stato pari a 0 (cioè se l'impresa fosse stata efficiente).

Possiamo quindi esprimere l'efficienza tecnica dell'impresa i-esima come:

$$\frac{E\left(Y_{it}^* \mid u_i, x_{it}, t = 1,...,T\right)}{E\left(Y_{it}^* \mid u_i = 0, x_{it}, t = 1,...,T\right)}$$

dove Y_{it}^* indica la produzione realizzata dall'impresa i nel periodo t. Questa misura varia tra 0 ed 1; quindi se il valore ottenuto è pari 0,9 significa che l'efficienza dell'impresa è al 90% di quella massima.

L'efficienza tecnica dell'impresa i può essere inoltre espressa

$$TE_i = (\bar{x}_i \beta - \upsilon_\iota)(\bar{x}_i \beta)^{-1} \; TE_i = (\bar{x}_i \beta - \upsilon_\iota)(\bar{x}_i \beta)^{-1}$$

dove $\bar{x}_i$ rappresenta la media dei livelli dei fattori produttivi per l'impresa i. Nel caso in cui si ipotizzi che gli effetti individuali si distribuiscano secondo una normale troncata, la corrispondente misura (media) dell'efficienza del settore è:

$$TE = 1 - \left\{ \mu + \frac{\sigma\Phi(-\mu/\sigma)}{1-\Phi(-\mu/\sigma)} \right\} \left(x\beta \right)^{-1}$$

dove μ è la moda della normale troncata, σ ne è la varianza e Φ è la funzione di densità della normale standard.

Bibliografia

Afriat S.N. (1972), *Efficency Estimation of Production Function*, International Economic Review.

Aigner D.J., Chu S.F. (1968), *On Estimatyng the Industry Production Function*, American Economic Review.

Aigner, D.J., Amemya T., Poirier D.J. (1976), *On the Estimation of Production Frontiers: Maximum Likelihood Estimation of the Parameters of a Discontinuos Density Function*. International Economic Review.

Amemiya T., MacCurdy T.E. (1986), *Instrumental-variable estimastion of an errors components model*, Econometrica.

Banker R.D., Maindiratta A. (1985), *Maximum Likelihood Estimation of Monotonic and Concave Production Frontiers,* unpubblished (school of Urban and Pubblic Affairs, Carneggie-Mellon University).

Battese G.E, Coelli T.J. (1988), *Prediction of firm level technical efficiencies with generalized frontier production function and panel data*, Journal of Econometrics.

Breusch T.S., Mizon G.E., Schmidt P.(1989), *Efficient estimation using panel data*, Econometrica.

Chamberlain G. (1980), *Analisys of Covariance with Qualitative Data*, Review of Economic Studies.

Gabrielson A. (1975), *On Estimating Production Functions*, Working Paper No. A-85, (Chr. Michelsen Institute, Departementof Humanities and Socil Sciences, Bergen, Norway).

Green W.H. (1980), *Maximum Likelihood Estimation of Econometric Frontier Functions*, Journal of Econometrics.

Green W.H. (1982), *Maximum Likelihood Estimation of Stocastic Frontier Production Models*, Journal of Econometrics.

Hanoch G., Rothschild M. (1972), *Testing the Assumptions of Production Theory: A Nonparametric Approach*, Journal of Political Economy.

Hausman J.A.(1978), *Specification test in econometrics*, Econometrica.

Hausman J.A. Taylor W. (1981), *Specification test in econometrics*, Econometrica.

Jondrow J., Lovell C.A.K., Materov I.S., Schmidt P. (1982), *On the Estimation of Techical Inefficency in the Stocastic Frontier Production Function Model*, Journal Econometrics.

Lee, L.-F. (1983), *A Test for Distibutional Assumption for the Stochastic Frontier Functions,* Journal of Econometrics.

Lovell C.A.K., Sickles R.C. (1983), *Testing Efficency Hypotheses in Joint Production: A Parametric Approach,* Review of Economics and Statistics.

Olson J. A., Scmidt P, Waldman D.M. (1980), *A Monte Carlo Study of Estimator of Stocastic Frontier Production Functions,* Journal of Econometrics.

Tani P. (1986), *Analisi Microecoomica della Produzione,* Nuova Italia Scientifica" Roma
Schmidt P. (1976), *On the Statistical Estimation of Parametric Frontier Production Functions*, Review of Economics and Statistics.

Schmidt P. (1985), *Frontier Production Functions,* Econometric Reviews.

Schmidt P. e Lovell C.A.K.. (1979), *Estimating technical and allocative inefficency relative to stochatic production and cost frontier*, Journal of econometrics.

Schmidt P. e Lovell C.A.K.. (1980), *Estimating stochastic production and cost frontier when technical and allocative inefficency area correlated*, Journal of econometrics.

Schmidt P. Sickles R. (1984), *Productions Frontiers and Panel Data*, Journal of Businnes and Economics Statistics.

Varian H. (1984), *The Nonparametric Approach to Production Analisys*, Econometrica.